

# Beschleunigtes Inversionsverfahren in der Oberflächenwellenseismik

Andre J. Teshler

Dezember 1999  
Universität Stuttgart

## **Inhaltsverzeichnis**

<b>1</b>	<b>Vorwort und Motivation</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Thomson-Haskell Methode</b>	<b>12</b>
<b>4</b>	<b>Rolle der Modellparameter</b>	<b>18</b>
<b>5</b>	<b>Numerisches Umsetzen</b>	<b>26</b>
<b>6</b>	<b>Anhang</b>	<b>33</b>
<b>7</b>	<b>Danksagungen</b>	<b>39</b>
<b>8</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>40</b>

# 1 Vorwort und Motivation

Obwohl der Schwerpunkt dieser Diplomarbeit im Bereich der quantitativen Seismologie liegt, sollen hier neben der eigentlichen Aufgabenstellung auch die Anwendungsbereiche der flachseismischen Verfahren und die möglichen konkreten, geowissenschaftlichen Fragestellungen kurz angesprochen werden. Das ist notwendig um die sonst ziemlich formale, mathematische Abhandlung in die richtige Perspektive zu setzen, denn wie interessant und selbsttragend die theoretische Untersuchung auch sein mag, muß sie letztendlich bei den wirklichen, praktischen Problemen ihren Nutzen unter Beweis stellen.

Bei geologischer und ingenieur-geologischer Erkundung der obersten Erdkruste gewinnen Methoden der Flachseismik zunehmend an Bedeutung. Neben den klassischen Anwendungsgebieten wie Erdölerkundung, können sie auch zur feineren strukturellen Differenzierung der obersten Sedimentschichten angewandt werden. Zum Beispiel zur Untersuchung der Tal- und Beckenfüllungen und ihrer Wassersättigung oder zum Bestimmen der Mächtigkeit der Karstüberdeckung und damit zur Rekonstruktion des präquartären Paläoreliefes [Hecht98].

Eine besondere Stellung bei den flachseismischen Methoden nimmt die Oberflächenwellenseismik ein. Im Gegensatz zu der klassischen Refraktionsseismik sind die Oberflächenwellenmethoden äußerst empfindlich für die Bereiche geringer Tiefe [Bohlen98] und setzen nicht voraus, daß die seismische Geschwindigkeit monoton mit der Tiefe zunimmt. Daher sind auch Untersuchungen von Medien mit harten Decken wie zum Beispiel Straßen, Parkplätzen [Forbriger98], oder auch erstarrter vulkanischer Ströme möglich.

Ein wesentlicher Vorteil von Sondierungen mit Oberflächenwellen ist deren Empfindlichkeit für die Scherfestigkeit des Mediums. Dieser Parameter ist für eine große Zahl von geotechnischen Anwendungen relevant [Roth96; Stokoe89]. Dichte und Wassersättigung sind weitere wichtige Parameter, die mit der Oberflächenwellenseismik angesprochen werden können.

Die, für das Bestimmen der Scherfestigkeit des Untergrundes notwendige S-Wellengeschwindigkeit, kann mit Hilfe der

Oberflächenwellen viel leichter ermittelt werden als mit den Raumwellen. Es genügt eine vertikal eingreifende Kraft, zum Beispiel ein Hammerschlag, die viel leichter zu erzeugen ist, als die im Fall der Raumwellen für die Bestimmung der Scherfestigkeit notwendige, horizontale Kraft.

Zur Interpretation der gemessenen Daten benutzt man oft ein Inversionsverfahren. Dabei wird ein Modell der Erde erstellt, das den zu erwartenden geologischen Verhältnissen möglichst nahe liegt. Für dieses Modell führt man dann eine Vorwärtsrechnung durch, in der die synthetischen Seismogramme für die eingesetzte Quelle ausgerechnet werden. Auf diesem Weg ermittelte, theoretische Ergebnisse vergleicht man mit den tatsächlich gemessenen Seismogrammen. Dabei werden Modellparameter, zum Beispiel Schichteigenschaften, so lange variiert, bis theoretische Resultate und Felddaten möglichst übereinstimmen.

Dabei muß die Menge der interessanten Modelle in den meisten Fällen von Anfang an stärker, als mathematisch notwendig ist, eingeschränkt werden, um das Inversionsverfahren mit vernünftigem Rechenaufwand durchführen zu können. Das führt oft dazu, daß viele interessante Werte, wie zum Beispiel die Dichte und damit die Scherfestigkeit selber, nicht angesprochen werden können.

Die Performanceprobleme entstehen unter anderem dadurch, daß die für die Inversion notwendigen partiellen Ableitungen des Wellenfeldes nach den einzelnen Modellparametern mit Hilfe der Differenzenquotienten bestimmt werden. Dies setzt eine mehrfache Vorwärtsrechnung voraus und ist daher sehr zeitaufwendig. Der naheliegende Gedanke, die Ableitungen schon während der Vorwärtsrechnung zu bestimmen, scheitert oft am Fehlen des notwendigen mathematische Formalismusses.

Das Problem verkompliziert sich weiterhin dadurch, daß die Form in der die Ableitungen formuliert werden müssen, um eine signifikante Beschleunigung der Inversion zu bewirken, naturgemäß von der Methode abhängt, die für die Vorwärtsrechnung eingesetzt wird.

Ziel dieser Arbeit ist die Beschleunigung des Inversionsverfahrens von synthetischen Seismogrammen, die mit der Thomson-Haskell

Methode berechnet werden. Dabei beschränkt man sich auf flachgeschichtete Modelle. Da in jeder einzelnen Schicht die Grundgleichungen analytisch lösbar sind, konzentriert sich die Methode auf die Randbedingungen, die an den Schichtgrenzen erfüllt werden müssen. Das Gesamtverfahren kann dann als ein Matrizenalgorithmus formuliert werden.

In den nächsten Abschnitten werden die partiellen Ableitungen des Modells nach allen wichtigen Parametern im Rahmen der Thomson-Haskell Methode in analytischer Form hergeleitet. Es wird gezeigt, daß es beim numerischen Umsetzen einen Übergang von quadratischer zu linearer Abhängigkeit der Rechenzeit von der Anzahl der Schichten, im Vergleich zur Berechnung der Ableitungen mit den Differenzenquotienten bedeutet. Zum Schluß werden die bekannten numerischen Instabilitäten des Algorithmusses angesprochen.

Die im Anschluß an diese Diplomarbeit geplante Implementierung soll die strukturelle Vielfalt der beim Interpretieren der Oberflächenwellen benutzten Modelle dem Informationsreichtum der oberflächenwellenseismischen Daten adäquanter machen.

## 2 Einleitung

In diesem Abschnitt werden die Grundgleichungen der Elastizitätslehre sowie die verwendete Nomenklatur dargestellt.

Betrachten wir einen isotropen Festkörper, der einer bruchfreien Deformation unterworfen ist. Die Verschiebung des Körperpunktes  $\vec{r}$  kann durch den Vektor  $\vec{u} = \vec{r}' - \vec{r}$  dargestellt werden. Dabei sind  $\vec{r}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$  und  $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$  die entsprechenden Radiusvektoren des Punktes nach und vor der Deformation. Im kartesischen Koordinatensystem sind  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  und  $x_3 = z$ .

Betrachten wir einen bestimmten Teil des deformierten Körpers und die Kraft, die auf diesen Teil wirkt. Diese Kraft kann als Summe aller Kräfte, die auf einzelne Elemente des Teilkörpers wirken, dargestellt werden:

$$\vec{F} = \int_V \vec{F}_v dV. \quad (1)$$

Die Beiträge von Elementen, die keine gemeinsame Oberfläche mit dem betrachteten Teilvolumen haben, eliminieren sich gegenseitig infolge der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung. Der Rest muß dann als Summe der Kräfte dargestellt werden können, die von außen über die Oberfläche auf diesen Teil des Körpers wirken. Für die  $i$ -te Komponente haben wir dann

$$F_i = \int_V \vec{F}_{v_i} dV = \int_S \vec{\sigma}_i \vec{d}s, \quad (2)$$

wobei  $\vec{\sigma}_i$  ein geeigneter Vektor sei. Das bedeutet aber, daß  $F_{v_i}$  als Divergenz eines Tensors zweiter Stufe dargestellt werden kann (siehe auch [Landau89, Seite 5]):<sup>1</sup>

$$F_{v_i} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (3)$$

---

<sup>1</sup>Hier und überall in dieser Arbeit werden die Symbole für Summation über Vektor- und Tensorindizes fortgelassen. Die zweifach (im gegebenen Produkt oder Differentialausdruck) auftretenden Indizes bedeuten überall eine Summation über die Werte 1,2,3.

Den Tensor  $(\sigma_{ik})$ , der wegen der Drehimpulserhaltung symmetrisch sein muß, nennt man der Spannungstensor.

Der Verschiebungsvektor  $\vec{u}$  ist überall innerhalb des Körpers stetig, solange die Deformation bruchfrei bleibt. Gleichzeitig muß das Tensorelement  $\sigma_{ij}$  eine stetige Funktion der Variablen  $x_i$  und  $x_j$  sein. Da die physikalische Bedeutung des Spannungstensors und des Verschiebungsvektors in keiner Weise von Materialeigenschaften abhängen, müssen beide Stetigkeitsbedingungen auch für ein heterogenes Medium uneingeschränkt gelten.

Verzichten wir auf die Berücksichtigung aller anderen Kräfte außer den elastischen, ergibt sich aus (3) folgende Bewegungsgleichung:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \rho \frac{\partial^2 u_i(t)}{\partial t^2}, \quad (4)$$

wobei  $\rho$  die Dichte des Materials ist.

Wenn man die Lösung der Bewegungsgleichung (4) als periodische Schwingung sucht, kann die Zeitabhängigkeit durch den Ansatz  $\vec{u}(t) = \vec{u} e^{i\omega t}$  eliminiert werden, wobei  $\vec{u}$  nicht mehr von der Zeit abhängt. Wir erhalten danach für  $u_i$ :

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho \omega^2 u_i = 0. \quad (5)$$

In diesem Fall hängt  $\vec{u}$  von der Frequenz ab:  $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}, \omega)$  und die allgemeine Lösung ergibt sich als Superposition der Lösungen für unterschiedliche Frequenzen.

Sind die Deformationen klein, so kann die Beziehung zwischen Spannung und Deformation in Form des Hookeschen Gesetzes formuliert werden (siehe auch [Landau89], Seite 12):

$$\sigma_{ik} = \lambda \delta_{ik} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \quad (6)$$

Dabei sind  $\lambda$  und  $\mu$  für das Material des Körpers spezifische Konstanten. Die Größe  $\delta_{ik}$  ist der Einheitstensor.

Damit kann die Bewegungsgleichung (4) wie folgt umgeschrieben werden:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + \rho \omega^2 u_i = 0. \quad (7)$$

Wenn wir uns jetzt das Gesamtfeld  $\vec{u}$  in wirbelfreies  $\vec{u}_p$  und quellfreies  $\vec{u}_s$  zerlegt denken,

$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{u}_p + \vec{u}_s \\ \vec{u}_p = \vec{\nabla} \Phi \\ \vec{u}_s = \vec{\nabla} \times \vec{\Psi}, \end{cases} \quad (8)$$

wobei  $\Phi$  und  $\vec{\Psi}$  entsprechende künstliche Potentiale darstellen, bekommen wir

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} [\rho \omega^2 \Phi + (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Phi] \\ + \vec{\nabla} \times [\rho \omega^2 \vec{\Psi} + \mu \nabla^2 \vec{\Psi}] = 0. \end{aligned} \quad (9)$$



Durch weiteres Anwenden der Operatoren *div* and *rot* auf (9) erhalten wir vier Laplacegleichungen. Eine für  $\Phi$  und je eine für jede  $\vec{\Psi}$ -Komponente.

$$\begin{cases} \nabla^2 \Phi + \frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu} \Phi = 0 \\ \nabla^2 \Psi_i + \frac{\rho\omega^2}{\mu} \Psi_i = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Die drei Gleichungen für  $\vec{\Psi}$  sind nicht ganz unabhängig. Die Bedingung  $\nabla \vec{\Psi} = 0$  erlaubt eine genauere Formulierung<sup>2</sup>:

$$\begin{cases} \nabla^2 \Phi + \frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu} \Phi = 0 \\ \nabla^2 \Psi_z + \frac{\rho\omega^2}{\mu} \Psi_z = 0 \\ \nabla^2 [(\vec{\nabla} \times \vec{\Psi})_z] + \frac{\rho\omega^2}{\mu} (\vec{\nabla} \times \vec{\Psi})_z = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Das Vektorpotential  $\vec{\Psi}$  kann jetzt durch zwei neue skalare Potentiale  $\chi = \Phi_z$  und  $\Omega = (\vec{\nabla} \times \vec{\Psi})_z$  ersetzt werden.

Man kann aber auch anders vorgehen. Es wird versucht, die gesamte Bewegung als eine Superposition von drei getrennten Wellen darzustellen. Dabei sollen je zwei von drei Funktionen  $\Phi$ ,  $\Psi_z$  und  $(\vec{\nabla} \times \vec{\Psi})_z$  überall verschwinden. Der Vorteil dabei ist, daß das skalare Potential für  $(\vec{\nabla} \times \vec{\Psi})_z$  so formuliert werden kann, daß die Bedingungen  $\Psi_z = 0$  und  $\vec{\nabla} \vec{\Psi} = 0$  von Anfang an berücksichtigt werden.

Nutzen wir dafür die Eichfreiheit des Vektorpotentials  $\vec{\Psi}$  aus. Da die einzige relevante, physikalisch sinnvolle Größe der Verschiebungsvektor  $\vec{u}_p = \vec{\nabla} \times \vec{\Psi}$  ist, können wir zum Potenzial  $\vec{\Psi}$  einen Gradient einer beliebiger differenzierbarer Funktion  $\phi$  addieren. Nehmen wir  $\phi(x, y, z) = -\int \Psi_z(x, y, z) dz$  und der neue Potenzial  $\vec{\Psi}^* = \vec{\Psi} + \vec{\nabla} \phi$ . Dann haben wir  $\Psi_z^* = 0$ .<sup>3</sup>

<sup>2</sup>Dafür differenzieren wir die Gleichung für  $\Psi_x$  nach  $y$ , die Gleichung für  $\Psi_y$  nach  $x$  und ziehen die Eine von der Anderen ab. Das ergibt eine Wellengleichung für  $(\vec{\nabla} \times \vec{\Psi})_z$ . Ähnlich differenzieren wir die Gleichung für  $\Psi_x$  nach  $x$ , die Gleichung für  $\Psi_y$  nach  $y$  und addieren die Eine zur Anderen. Unter Berücksichtigung der  $\nabla \vec{\Psi} = 0$  ergibt das eine Trivialität.

<sup>3</sup>Mit  $\phi(x, y, z) = -\int \Psi_z(x_o, y_o, z) dz$  und konstanten  $x_o$  und  $y_o$  erreichen wir sogar die einfachere Form  $\vec{\Psi}^* = (\Psi_x, \Psi_y, 0)$ , die für die weitere Überlegungen aber keinesfalls notwendig ist.

Jetzt, wenn wir nur zwei Komponenten in dem Vektorpotenzial haben, kann die letzte Gleichung aus dem System (11) einfacher formuliert werden:  $\nabla \vec{\Psi}^* = \partial \Psi_x^* / \partial x + \partial \Psi_y^* / \partial y = 0$  bedeutet, daß es eine Funktion  $M(x, y, z)$  gibt, die durch zwei Gleichungen definiert ist:  $\partial M(x, y, z) / \partial y = \Psi_x^*$  und  $\partial M(x, y, z) / \partial x = -\Psi_y^*$ .

Dann sind  $\vec{\Psi}^* = \vec{\nabla} \times (0, 0, M)$  und  $(\vec{\nabla} \times \vec{\Psi}^*)_z = -\nabla_2^2 M(x, y, z)$ , wobei  $\nabla_2^2 = (\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2)$  ist.

Die letzte Gleichung vom System (11) kann dann so umgeschrieben werden:

$$\nabla^2 \nabla_2^2 M(x, y, z) + \frac{\rho \omega^2}{\mu} \nabla_2^2 M(x, y, z) = 0. \quad (12)$$

Da die Operatoren  $\nabla^2$  und  $\nabla_2^2$  kommutieren, und  $M$  von  $z$  abhängen darf, haben wir

$$\nabla^2 M + \frac{\rho \omega^2}{\mu} M = 0. \quad (13)$$

Die Funktion  $M$  wird üblicherweise als  $\Psi^4$  bezeichnet und wir bekommen statt Gl. (11)

$$\begin{cases} \nabla^2 \Phi + \frac{\rho \omega^2}{\lambda + 2\mu} \Phi = 0 \\ \nabla^2 \Psi + \frac{\rho \omega^2}{\mu} \Psi = 0 \\ \nabla^2 \chi + \frac{\rho \omega^2}{\mu} \chi = 0 \end{cases} \quad (14)$$

und

$$\vec{u} = \nabla \Phi + \vec{\nabla} \times (0, 0, \chi) + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (0, 0, \Psi). \quad (15)$$

Die Gleichungen enthalten materialspezifische Parameter. Solange diese Parameter konstant bleiben, sind die Lösungen dieser Gleichungen, und damit auch die Wellen der drei Arten, von einander unabhängig. Kommen aber im deformierten Körper

---

<sup>4</sup> $\Psi$  ist jetzt eine skalare Funktion.

Materialinhomogenitäten vor<sup>5</sup>, so zwingen die zuvor erwähnten Kontinuitätsbedingungen Abhängigkeiten zwischen den Potentialen auf.

Betrachten wir der Fall der ebenen Materialdiskordanzen. Sind die Diskontinuitäten horizontal, können die Grössen, die der Stetigkeitsbedingungen unterliegen, an der Grenze in horizontalen Ebene differenziert werden [Aki80, Seite 215]. Danach müssen für den Verschiebungsvektor folgende drei Ausdrücke als Funktionen der  $z$ -Koordinate gleichzeitig stetig sein:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = (\vec{\nabla} \times \vec{u})_z \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} - \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ u_z \end{cases} \quad (16)$$

und für die Normalspannung:

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{u})_z}{\partial z} \\ \mu \left[ \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})}{\partial z} - 2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \nabla^2 u_z \right] \\ \lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{cases} \quad (17)$$

Für die SH-Wellen ( $\vec{u}_{sh} = \vec{\nabla} \times (0, 0, \chi)$ ) müssen beide  $\Phi$  und  $\Psi$  überall verschwinden, und folglich verschwinden auch  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$  und  $u_z$ . Damit erfüllen sich die zwei unteren Gleichungen in beiden Systemen (16) und (17) trivial.

Bei den SV-Wellen ( $\vec{u}_{sv} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (0, 0, \Psi)$ ) verschwinden  $\chi$  und  $\Phi$  und folglich auch  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ . Die Größe  $(\vec{\nabla} \times \vec{u})_z = (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (\vec{\Psi}_x^*, \vec{\Psi}_y^*, 0))_z$  verschwindet unter Berücksichtigung der Bedingung  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\Psi}^* = 0$  auch.<sup>6</sup>

Betrachten wir jetzt die P-Wellen ( $\vec{u}_p = \vec{\nabla} \Phi$ ). In diesem Fall verschwinden überall  $\chi$  und  $\Psi$ , und folglich auch  $(\vec{\nabla} \times \vec{u})_z$ . Die Terme  $u_z$  und  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$  können aber weiterhin vorhanden sein.

Wir sehen, daß die SH-Wellen nach der Interaktion mit der Diskontinuität weiterhin entkoppelt von den SV-Wellen und den

<sup>5</sup>Wir meinen hier die Inhomogenitäten, die noch *vor* der Deformation existierten und nicht die, die erst infolge deren entstanden haben. Das heißt, wir bleiben bei der linearen Elastizitätstheorie.

<sup>6</sup>Wir berücksichtigen hier, daß  $\Psi_x^* = \partial \Psi / \partial y$  und  $\Psi_y^* = -\partial \Psi / \partial x$  sind.

P-Wellen bleiben. Die letzteren zwei sind aber miteinander gekoppelt, wie es aus der Kopplung der  $\vec{\nabla}\vec{u}$  und  $u_z$  ersichtlich wird.<sup>7</sup>

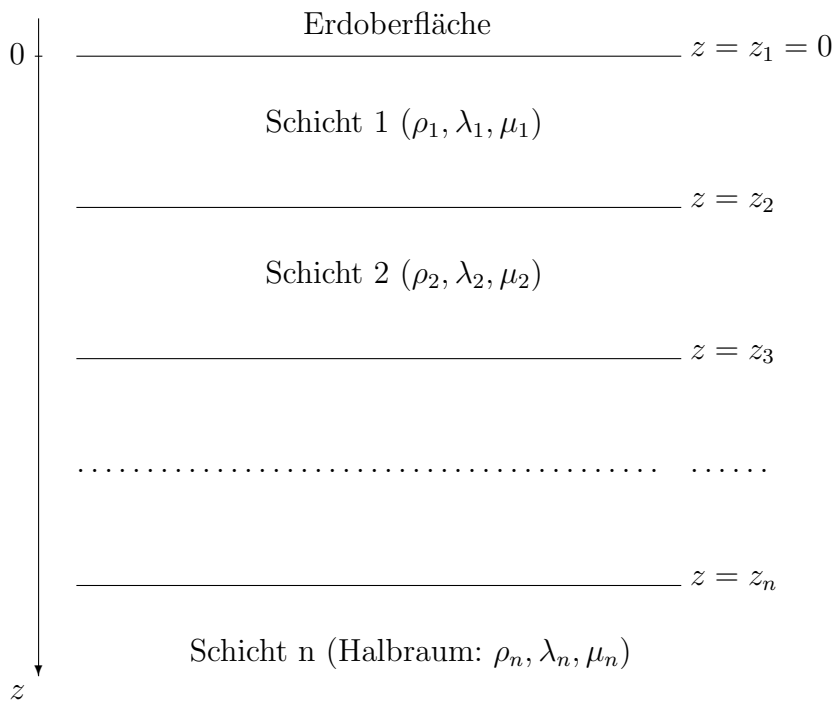
---

<sup>7</sup>Die  $\vec{\nabla}\vec{u}$  und  $u_z$  sind miteinander *und* mit den *Materialparameter*  $\mu$  und  $\lambda$  gekoppelt. Die Kopplung über die Parameter ist wichtig, denn genau das ist der Grund für die Kopplung von P- und SV-Wellen an der Materialinhomogenitäten.

### 3 Thomson-Haskell Methode

In diesem Abschnitt wird die Ermittlung der synthetischen Seismogramme nach der Thomson-Haskell Methode beschrieben.

Wir betrachten ein flachgeschichtetes Modell mit  $n$  Schichten. Der  $i$ -ten Schicht werden entsprechende Materialparameter zugewiesen:  $\rho_i$ ,  $\lambda_i$  und  $\mu_i$ . In zylindrischen Koordinaten mit nach unten gerichteter  $z$ -Achse wird die  $i$ -te Schicht durch zwei Flächen begrenzt:  $z = z_i$  und  $z = z_{i+1}$ , wobei  $z_i < z_{i+1}$  sei. Die freie Oberfläche sei bei  $z = z_1 = 0$  gedacht, und die letzte  $n$ -te Schicht, die nach oben mit der Fläche  $z = z_n$  begrenzt ist, sei ein homogener Halbraum:



Da in der Seismik Deformationen eher durch interne, lokale Quellen als durch von außerhalb wirkende Kräfte verursacht werden, muß die Quelle als eine Art zusätzliche Diskontinuität

betrachtet werden. In der Tat kann man sie in unserem Modell als eine eigene horizontale Grenze ( $z = z_s$ ) betrachten, an der, im Gegensatz zu den Schichtgrenzen, der Verschiebungsvektor und die Normalspannung einen für die Quelle charakteristischen Sprung aufweisen.<sup>8</sup>

Der Verschiebungsvektor kann innerhalb einer homogenen Schicht in folgender Form dargestellt werden (siehe auch [Wang99]):

$$\vec{u} = (u_r, u_\varphi, u_z) = \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[ U_m(z, k) \vec{e}_z + V_m(z, k) \vec{\nabla}_1 - W_m(z, k) \vec{e}_z \times \vec{\nabla}_1 \right] j_m(kr, \theta) k dk, \quad (18)$$

wobei

$$\vec{\nabla}_1 = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial(kr)} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad (19)$$

$$j_m(kr, \varphi) = \begin{cases} J_m(kr) \cos(m\varphi), & m = 0, 1, 2, \dots; \\ J_m(kr) \sin(m\varphi), & 0 \leq k \leq \infty. \end{cases} \quad (20)$$

und  $J_m$  die Besselfunktion 1. Art in  $m$ -ter Ordnung ist.

Folgende Bemerkungen sollen diese Darstellung näher bringen. Zuerst sehen wir, daß die Vektoren  $\vec{e}_z$ ,  $\vec{\nabla}_1$  und  $\vec{e}_z \times \vec{\nabla}_1$  eine orthogonale Basis im Vektorraum bilden. Auf der anderen Seite bilden die Funktionen  $J_m$  ein vollständiges orthogonales System im Raum der bis zur zweiten Ableitung stetigen Funktionen (siehe [Courant93], Seite 269). Das bedeutet, daß sich eine nahezu beliebige physikalisch sinnvolle Funktion in eine Reihe von  $J_m$  entwickeln läßt. Das Differenzieren nach  $r$  und  $\varphi$  verkompliziert

---

<sup>8</sup>Bei einer Punktquelle existiert die Diskontinuität natürlich nur in der unmittelbaren Umgebung der Quelle. Die Tatsache, daß wir selbst in diesem Fall von einer Flächendiskontinuität sprechen, hängt mit der mathematischen Darstellung zusammen. Bei der Besseltransformation zum Beispiel bezieht sich der Begriff Flächendiskontinuität nur auf jede Komponente im Einzelnen.

das Bild nur unwesentlich, denn das Ableiten nach  $\varphi$  bedeutet nur eine Phasenverschiebung, und das Ableiten nach  $r$  ein Vermischen von unterschiedlichen Ordnungen in der Reihe.

In Wirklichkeit ist es nicht nötig, die Darstellung (18) weiter zu begründen<sup>9</sup>, denn, wie wir bald sehen werden, ist es möglich, sie direkt aus der Lösung der Potentialgleichungen (14) herzuleiten.

Ähnlich kann für die Normalspannung geschrieben werden:

$$\vec{\sigma}_z = (\sigma_{zr}, \sigma_{z\varphi}, \sigma_{zz}) = \quad (21)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[ P_m(z, k) \vec{e}_z + S_m(z, k) \vec{\nabla}_1 - T_m(z, k) \vec{e}_z \times \vec{\nabla}_1 \right] j_m(kr, \theta) k dk.$$

Zum Bestimmen der Koeffizienten  $U_m, V_m, W_m, P_m, S_m$  und  $T_m$  benutzen wir die Potentialdarstellung (14).

Eine mögliche Lösung dafür kann dann wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{cases} \Phi = (A_u e^{\alpha z} + A_d e^{-\alpha z}) j_m(kr, \varphi) \\ \Psi = (B_u e^{\beta z} + B_d e^{-\beta z}) j_m(kr, \varphi) \\ \chi = (C_u e^{\beta z} + C_d e^{-\beta z}) j_m(kr, \varphi), \end{cases} \quad (22)$$

wobei

$$\begin{cases} \alpha^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{V_p^2} \\ \beta^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{V_s^2}, \end{cases} \quad (23)$$

und  $V_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$  und  $V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  die entsprechenden Wellengeschwindigkeiten sind.

Die Koeffizienten  $A_u, B_u, C_u, A_d, B_d$  und  $C_d$ , die innerhalb jeder Schicht konstant bleiben, müssen dann aus den Grenzbedingungen bestimmt werden.

Sind nur die Oberflächenwellen interessant, so müssen wir die Koeffizienten  $\alpha$  und  $\beta$  im unteren Halbraum reell denken und

---

<sup>9</sup>Im Anhang besprechen wir einen ähnlichen, aber wesentlich einfacheren Formalismus.

dafür sorgen, daß die exponentiell ansteigenden Glieder dort nicht erscheinen.

Ähnlich zu Gl. (18) bekommen wir die allgemeine Lösung durch Summieren über  $m$  und Integration über  $k$ .

Setzen wir diese Potentiale in Gl. (8) und Gl. (6) ein und vergleichen die Ergebnisse mit Gl. (18) und Gl. (21). Der Vergleich soll zwischen den Koeffizienten bei den Besselfunktionen gleicher Ordnung erfolgen, da die letzteren ein vollständiges orthogonales System bilden. Das Resultat kann folgendermaßen formuliert werden:

$$y = LEa. \quad (24)$$

Um die Ergebnisse kompakt schreiben zu können, haben wir vier Matrizen<sup>10</sup> eingeführt:

$$y = (U, P, V, S, W, T)^T, \quad a = (A_u, A_d, B_u, B_d, C_u, C_d)^T, \quad (25)$$

$$L = \quad (26)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\alpha & k & k & 0 & 0 \\ \mu(k^2 + \beta^2) & \mu(k^2 + \beta^2) & 2\mu k\beta & -2\mu k\beta & 0 & 0 \\ k & k & \beta & -\beta & 0 & 0 \\ 2\mu k\alpha & -2\mu k\alpha & \mu(k^2 + \beta^2) & \mu(k^2 + \beta^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu k\beta & \mu k\beta \end{pmatrix},$$

und die Diagonalmatrix  $E$ , mit den Diagonalelementen

$$(e^{\alpha z}, e^{-\alpha z}, e^{\beta z}, e^{-\beta z}, e^{\beta z}, e^{-\beta z}). \quad (27)$$

Die Stetigkeitsbedingungen für den Verschiebungsvektor  $\vec{u}$  und die Normalspannung  $\vec{\sigma}_z$  bedeuten dann einfach die Stetigkeit der

<sup>10</sup>Die Matrizen  $y$  und  $a$  können wegen ihres Transformationsverhaltens nicht als Vektoren bezeichnet werden.



Matrix  $y$ . Angewandt an der Oberfläche  $z = z_1 = 0$  ergibt das  $P = S = T = 0$ .

Die Überlegung, daß exponentiell ansteigende Terme, beziehungsweise von unten einfallende Wellen, in der unteren Schicht nicht vorhanden sein sollen, führt im Halbraum  $z > z_n$  zu der Bedingung  $A_u = B_u = C_u = 0$ .

Jetzt kann das Verfahren zum Wellenpropagieren formuliert werden.

Die meisten Randbedingungen an den Schichtgrenzen sehen am einfachsten in den Termen der Verschiebung und der Spannung aus. Aber das vertikale Propagieren innerhalb der Schicht erfolgt leichter in der Potentialdarstellung, wo sie einfaches Multiplizieren mit der Diagonalmatrix  $E(h_i)$  bedeuten. Dabei stellt  $h_i$  die Schichtmächtigkeit dar.

Der elegante ständige Übergang von einer Darstellung zu der anderen ermöglicht bei der Thomson-Haskell Methode scheinbar fließendes Propagieren des Wellenfeldes durch das Schichtpaket.<sup>11</sup> Ist die Matrix  $y_i$  an der Grenze  $z_i$  bekannt, so kann sie bis zur Grenze  $z_{i+1}$  propagiert werden:

$$y_{i+1} = L_i E_i(h_i) L_i^{-1} y_i, \quad (28)$$

mit

$$L^{-1} = \quad (29)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\rho\omega^2 - 2\mu k^2}{2\rho\omega^2\alpha} & \frac{-1}{2\rho\omega^2} & \frac{\mu k}{\rho\omega^2} & \frac{k}{2\rho\omega^2\alpha} & 0 & 0 \\ \frac{-\rho\omega^2 + 2\mu k^2}{2\rho\omega^2\alpha} & \frac{-1}{2\rho\omega^2} & \frac{\mu k}{\rho\omega^2} & \frac{-k}{2\rho\omega^2\alpha} & 0 & 0 \\ \frac{\mu k}{\rho\omega^2} & \frac{k}{2\rho\omega^2\beta} & \frac{\rho\omega^2 - 2\mu k^2}{2\rho\omega^2\beta} & \frac{-1}{2\rho\omega^2} & 0 & 0 \\ \frac{\mu k}{\rho\omega^2} & \frac{-k}{2\rho\omega^2\beta} & \frac{-\rho\omega^2 + 2\mu k^2}{2\rho\omega^2\beta} & \frac{-1}{2\rho\omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2k} & \frac{1}{2\mu k\beta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2k} & \frac{-1}{2\mu k\beta} \end{pmatrix}.$$

In der Praxis propagiert man oft einerseits, ausgehend von  $y_1 = (U, 0, V, 0, W, 0)^T$  von oben nach unten und andererseits, ausgehend von  $y_n = L_n(0, A_d, 0, B_d, 0, C_d)^T$  von unten nach oben bis zur Quellgrenze, an der die auf beiden Seiten gewonnene

<sup>11</sup>Im Anhang formulieren wir eine ähnliche Methode, die die Vorteile beider Darstellungen zu vereinen versucht, um auf diese Weise die Transformation zur Potentialform zu vermeiden.

Matrizen, eine für die Quelle charakteristische Differenz  $f_s = (U_s, P_s, V_s, S_s, W_s, T_s)^T$  aufweisen sollen.

Betrachten wir eine Punktquelle, kann für  $f_s$  in der Darstellung (18) und (21) geschrieben werden [Wang99]:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{s,0} = \left( -\frac{M_{zz}}{2\pi(\lambda+2\mu)}, -\frac{f_z}{2\pi}, 0, k\left(\frac{M_{xx}-M_{yy}}{4\pi} + \frac{\lambda M_{zz}}{2\pi(\lambda+2\mu)}\right), 0, 0 \right) \\ f_{s,1} = \left( 0, k\frac{M_{zx}-M_{xz}}{2\pi}, -\frac{M_{xz}}{2\pi\mu}, \frac{f_x}{2\pi}, -\frac{M_{xz}}{2\pi\mu}, \frac{f_x}{2\pi} \right) \\ f_{s,2} = \left( 0, 0, 0, k\frac{M_{xx}-M_{yy}}{4\pi}, 0, k\frac{M_{xx}+M_{yy}}{4\pi} \right), \end{array} \right. \quad (30)$$

wobei der zweite Index bei  $f_{s,i}$  die Ordnung der Besselfunktion in den Gleichungen (18) und (21) darstellt.

Die daraus resultierenden sechs Bedingungen erlauben dann die Unbekannten  $U, V, W, A_d, B_d$  und  $C_d$  zu bestimmen. Auf diese Weise kann man, wie es in dem Abschnitt "Numerisches Umsetzen" ausführlich diskutiert wird, das Wellenfeld überall im Körper ermitteln.

## 4 Rolle der Modellparameter

In diesem Abschnitt leiten wir partielle Ableitungen des Wellenfeldes nach den Schichtparametern des Modells her, was den eigentlichen Inhalt dieser Arbeit darstellt.

Wir erinnern uns, daß beim Propagieren von oben nach unten das Wellenfeld an der Grenze  $z = z_{k+1}$  zwischen der  $i$ -ten und der  $(i + 1)$ -ten Schicht laut Gl. (28) wie folgt geschrieben werden kann:<sup>12</sup>

$$y_{k+1} = \left( \prod_{i=k}^1 L_i E_i(h_i) L_i^{-1} \right) y_1. \quad (31)$$

Dabei hängen von den Eigenschaften der  $j$ -ten Schicht nur die Matrizen mit dem Subindex  $j$  ab. Folglich können wir für einen bestimmten Materialparameter  $\xi_j$  ( $0 < j < k$ ) dieser Schicht schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(y_{k+1})}{\partial\xi_j} &= \left( \prod_{i=k}^{j+1} L_i E_i(h_i) L_i^{-1} \right) \frac{\partial(L_j E_j(h_j) L_j^{-1})}{\partial\xi_j} \\ &\quad \times \left( \prod_{i=j-1}^1 L_i E_i(h_i) L_i^{-1} \right) y_1, \end{aligned} \quad (32)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial(L_j E_j(h_j) L_j^{-1})}{\partial\xi_j} &= \frac{\partial L_j}{\partial\xi_j} E_j(h_j) L_j^{-1} + L_j \frac{\partial E_j(h_j)}{\partial\xi_j} L_j^{-1} \\ &\quad + L_j E_j(h_j) \frac{\partial L_j^{-1}}{\partial\xi_j}. \end{aligned} \quad (33)$$

Genauso kann für das Propagieren von unten nach oben bis zu  $z = z_k$  geschrieben werden

$$y_k = \left( \prod_{i=k}^{n-1} L_i E_i(-h_i) L_i^{-1} \right) y_n. \quad (34)$$

---

<sup>12</sup>Hier und überall in dieser Arbeit wird ein Produktausdruck in bestimmter Reihenfolge ausgeschrieben gedacht:  $\prod_{i=1}^n p_i = p_1 p_2 \dots p_n$ .

Für einen bestimmten Parameter  $\xi_j$  ( $k < j < n - 1$ ) dieser Schicht bekommen wir:

$$\frac{\partial(y_k)}{\partial\xi_j} = \left( \prod_{i=k}^{j-1} L_i E_i(-h_i) L_i^{-1} \right) \frac{\partial(L_j E_j(-h_j) L_j^{-1})}{\partial\xi_j} \quad (35)$$

$$\times \left( \prod_{i=j+1}^n L_i E_i(-h_i) L_i^{-1} \right) y_n,$$

und

$$\frac{\partial(L_j E_j(-h_j) L_j^{-1})}{\partial\xi_j} = \frac{\partial L_j}{\partial\xi_j} E_j(-h_j) L_j^{-1} \quad (36)$$

$$+ L_j \frac{\partial E_j(-h_j)}{\partial\xi_j} L_j^{-1} + L_j E_j(-h_j) \frac{\partial L_j^{-1}}{\partial\xi_j}.$$

Da die einzelnen Matrizen  $L_i E_i(\pm h_i) L_i^{-1}$  schon während der Vorwärtsrechnung gebraucht werden, besteht der zusätzliche Aufwand, um die Ableitungen auszurechnen, nur im Errechnen der Matrizen

$$\frac{\partial L_j}{\partial\xi_j}, \frac{\partial E_j(\pm h_j)}{\partial\xi_j} \quad \text{und} \quad \frac{\partial L_j^{-1}}{\partial\xi_j}. \quad (37)$$

Bevor aber die Matrizen in expliziter Form aufgeschrieben werden, wollen wir Folgendes feststellen.

Die für die Praxis wichtigen Schichtparameter sind  $V_p$ ,  $V_s$ ,  $\rho$  und die Schichtmächtigkeit  $h$ . Da wir bis jetzt immer  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  und  $\rho$  verwendet haben, schreiben wir hier die Umrechnungsformeln

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial V_s} = \frac{\omega^2}{\beta V^3} \frac{\partial}{\partial \beta} \\ \frac{\partial}{\partial V_p} = \frac{\omega^2}{\alpha V^3} \frac{\partial}{\partial \alpha}, \end{cases} \quad (38)$$

mit deren Hilfe das Ableiten nach  $V_s$  und  $V_p$  durch das Differenzieren nach  $\alpha$  und  $\beta$  ersetzt werden kann<sup>13</sup>.

Weiter haben wir  $\mu = \rho V_s^2 = \frac{\rho\omega^2}{k^2 - \beta^2}$ , und folglich

$$\begin{cases} \frac{\partial \mu}{\partial \beta} = \frac{2\beta\rho\omega^2}{(k^2 - \beta^2)^2} \\ \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} = 0. \end{cases} \quad (39)$$

Damit können wir schreiben:

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2k\mu & -2k\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (40)$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4\rho\omega^2\beta k^2}{(k^2 - \beta^2)^2} & \frac{4\rho\omega^2\beta k^2}{(k^2 - \beta^2)^2} & 2k\rho\omega^2 \frac{k^2 + \beta^2}{(k^2 - \beta^2)^2} & -2k\rho\omega^2 \frac{k^2 + \beta^2}{(k^2 - \beta^2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{4k\alpha\beta\rho\omega^2}{(k^2 - \beta^2)^2} & -\frac{4k\alpha\beta\rho\omega^2}{(k^2 - \beta^2)^2} & \frac{4\rho\omega^2\beta k^2}{(k^2 - \beta^2)^2} & \frac{4\rho\omega^2\beta k^2}{(k^2 - \beta^2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k\rho\omega^2 \frac{k^2 + \beta^2}{(k^2 - \beta^2)^2} & -k\rho\omega^2 \frac{k^2 + \beta^2}{(k^2 - \beta^2)^2} \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Hier und überall in diesem Abschnitt ziehen wir die Größen  $\alpha$  und  $\beta$  den Größen  $V_p$  und  $V_s$  vor, um die Formeln mit dem Abschnitt 3 einheitlich zu halten.<sup>14</sup>

Unter Berücksichtigung von  $\frac{\partial \mu}{\partial \rho} = \frac{\omega^2}{k^2 - \beta^2}$  fahren wir fort.

<sup>13</sup>Bei der Wahl der Schichtparameter, für die wir die partiellen Ableitungen ausrechnen, muß bedacht werden, daß diese Ableitungen nur dann einen Sinn machen, wenn die Parameter unabhängig sind. Ein möglicher Satz wäre zum Beispiel  $\lambda, \mu$  und  $\rho$ . Um das Differenzieren zu vereinfachen benutzen wir in dieser Arbeit einen anderen Satz:  $\alpha, \beta$  und  $\rho$ . Bei dem partiellen Differenzieren nach einem von diesen Parametern verstehen wir immer, daß die anderen zwei dabei festgehalten werden. Die sonstigen abhängigen Größen, wie zum Beispiel  $\mu$ , müssen mitdifferenziert werden.

<sup>14</sup>Das kann auch beim Umsetzen des Algorithmuses von Vorteil sein, weil die schon vorhandene Implementation der Vorwärtsrechnung diese Darstellung benutzt.

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega^2 \frac{k^2 + \beta^2}{k^2 - \beta^2} & \omega^2 \frac{k^2 + \beta^2}{k^2 - \beta^2} & \frac{2\omega^2 k \beta}{k^2 - \beta^2} & \frac{-2\omega^2 k \beta}{k^2 - \beta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\omega^2 k \alpha}{k^2 - \beta^2} & \frac{-2\omega^2 k \alpha}{k^2 - \beta^2} & \omega^2 \frac{k^2 + \beta^2}{k^2 - \beta^2} & \omega^2 \frac{k^2 + \beta^2}{k^2 - \beta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\omega^2 k \beta}{k^2 - \beta^2} & -\frac{\omega^2 k \beta}{k^2 - \beta^2} \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Die Ableitungen von  $E$  sind trivial:

$$\begin{cases} \frac{\partial E(\pm h)}{\partial \alpha} = D[\pm h e^{\pm \alpha h}, \mp h e^{\mp \alpha h}, 0, 0, 0, 0] \\ \frac{\partial E(\pm h)}{\partial \beta} = D[0, 0, \pm h e^{\pm \beta h}, \mp h e^{\mp \beta h}, \pm h e^{\pm \beta h}, \mp h e^{\mp \beta h}] \\ \frac{\partial E(\pm h)}{\partial \rho} = 0, \end{cases} \quad (43)$$

wobei  $D[\dots]$  eine diagonale Matrix mit den entsprechenden Diagonalelementen darstellen soll.

Um Ableitungen von  $L^{-1}$  auszurechnen, berücksichtigen wir folgende Zusammenhänge

$$\begin{cases} \frac{\partial(\mu/\rho)}{\partial \rho} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\rho \omega^2 - 2\mu k^2}{2\rho \omega^2 \beta} \right) = \frac{2k^2 \mu - \rho \omega^2}{2\rho \omega^2 \beta^2} - \frac{2k^2}{(k^2 - \beta^2)^2} \\ \frac{\partial(\mu\beta)}{\partial \beta} = \rho \omega^2 \frac{k^2 + \beta^2}{(k^2 - \beta^2)^2}, \end{cases} \quad (44)$$

mit deren Hilfe wir schreiben können:

$$\frac{\partial L^{-1}}{\partial \alpha} = \begin{pmatrix} \frac{-\rho\omega^2+2\mu k^2}{2\rho\omega^2\alpha} & 0 & 0 & \frac{-k}{2\alpha^2\rho\omega^2} & 0 & 0 \\ \frac{\rho\omega^2-2\mu k^2}{2\rho\omega^2\alpha} & 0 & 0 & \frac{k}{2\alpha^2\rho\omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial L^{-1}}{\partial \beta} = \tag{45}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{2\beta k^2}{\alpha(k^2-\beta^2)^2} & 0 & \frac{2\beta k}{(k^2-\beta^2)^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\beta k^2}{\alpha(k^2-\beta^2)^2} & 0 & \frac{2\beta k}{(k^2-\beta^2)^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2k\beta}{(k^2-\beta^2)^2} & \frac{1}{2\rho\omega^2\beta^2} & \frac{2k^2\mu-\rho\omega^2}{2\rho\omega^2\beta^2} - \frac{2k^2}{(k^2-\beta^2)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2k\beta}{(k^2-\beta^2)^2} & \frac{-1}{2\rho\omega^2\beta^2} & -\frac{2k^2\mu-\rho\omega^2}{2\rho\omega^2\beta^2} + \frac{2k^2}{(k^2-\beta^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho\omega^2(k^2+\beta^2)}{2k\mu^2\beta^2(k^2-\beta^2)^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\rho\omega^2(k^2+\beta^2)}{2k\mu^2\beta^2(k^2-\beta^2)^2} \end{pmatrix},$$

und

$$\frac{\partial L^{-1}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2\rho^2\omega^2} & 0 & \frac{-k}{2\alpha\rho^2\omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\rho^2\omega^2} & 0 & \frac{k}{2\alpha\rho^2\omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-k}{2\beta\rho^2\omega^2} & 0 & \frac{1}{2\rho^2\omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{2\beta\rho^2\omega^2} & 0 & \frac{1}{2\rho^2\omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\omega^2}{2\mu^2 k\beta(k^2-\beta^2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\omega^2}{2\mu^2 k\beta(k^2-\beta^2)} \end{pmatrix}.$$

Die Quellterme (30) hängen auch von der Materialparametern ab. Die entsprechende Ableitungen sehen wie folgt aus<sup>15</sup>:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_{s,0}}{\partial \lambda} = \left( \frac{M_{zz}}{2\pi(\lambda+2\mu)^2}, 0, 0, \frac{k\mu M_{zz}}{\pi(\lambda+2\mu)^2}, 0, 0 \right) \\ \frac{\partial f_{s,1}}{\partial \lambda} = \frac{\partial f_{s,2}}{\partial \lambda} = (0, 0, 0, 0, 0, 0), \end{cases} \tag{46}$$

<sup>15</sup>Die genaue Rolle, die diese Ableitungen spielen, wird aus der Diskussion in dem Abschnitt "Numerisches Umsetzen" klar.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_{s,0}}{\partial \mu} = \left( \frac{M_{zz}}{\pi(\lambda+2\mu)^2}, 0, 0, \frac{k\lambda M_{zz}}{\pi(\lambda+2\mu)^2}, 0, 0 \right) \\ \frac{\partial f_{s,1}}{\partial \mu} = \left( 0, 0, \frac{M_{xz}}{2\pi\mu^2}, 0, \frac{M_{xz}}{2\pi\mu^2}, 0 \right) \\ \frac{\partial f_{s,2}}{\partial \mu} = (0, 0, 0, 0, 0, 0) \end{array} \right. \quad (47)$$

und

$$\frac{\partial f_{s,0}}{\partial \rho} = \frac{\partial f_{s,1}}{\partial \rho} = \frac{\partial f_{s,2}}{\partial \rho} = (0, 0, 0, 0, 0, 0). \quad (48)$$

Soviel zu den Ableitungen nach den Materialparametern.

Betrachten wir die Mächtigkeiten einzelner Schichten, so stellt sich die Frage, was verstehen wir unter Veränderung der Schichtmächtigkeit? Es gibt mindestens zwei Varianten.

Bei der ersten Variante bleiben die Mächtigkeiten aller tiefer liegenden Schichten zwar konstant, es verschiebt sich aber ihre Position. Und zwar um den Wert, der der Veränderung der Mächtigkeit der variierten Schicht entspricht.

Im zweiten Fall verändert sich nicht nur die Mächtigkeit einer Schicht, sondern, und zwar genau im umgekehrten Maß, auch die der Schicht darunter. Wir vergrößern zum Beispiel die Mächtigkeit der  $i$ -ten Schicht um den Wert  $\delta h_i$ , und verkleinern die Mächtigkeit der  $(i+1)$ -ten Schicht um  $\delta h_{i+1} = -\delta h_i$ . In diesem Fall ändern sich die Positionen und Parameter anderer Schichten nicht.

Betrachten wir zuerst die erste Variante.

Da beim Propagieren mit der Thomson-Haskell Methode die absolute Position der Schichten keine Rolle spielt, resultiert die Variation der Mächtigkeit nur in der Veränderung der Matrizen, die diese Schicht beschreiben, und die Formel (32) kann uneingeschränkt angewandt werden. Da  $L$  und  $L^{-1}$  von  $h$  nicht abhängen, entfallen entsprechende Terme und wir bekommen

$$\frac{\partial(L E(\pm h) L^{-1})}{\partial h} = L \frac{\partial E(\pm h)}{\partial h} L^{-1} \quad (49)$$



und

$$\frac{\partial E(\pm h)}{\partial h} = \quad (50)$$

$$D [ \pm \alpha e^{\pm \alpha h}, \mp \alpha e^{\mp \alpha h}, \pm \beta e^{\pm \beta h}, \mp \beta e^{\mp \beta h}, \pm \beta e^{\pm \beta h}, \mp \beta e^{\mp \beta h} ].$$

Betrachten wir jetzt die zweite Variante.

In diesen Fall werden die Schichten immer paarweise verändert, und die Ableitungen können direkt durch wiederholtes Anwenden der ersten Variante berechnet werden.

Zum Schluß versuchen wir den Rechenaufwand abzuschätzen.

Da die einzelnen Matrizen  $L$  und  $E$  und ihre Produkte schon während der Vorwärtsrechnung abgespeichert werden können, wächst der Mehraufwand um die Ableitungen auszurechnen linear mit der Schichtenanzahl  $n$ . Für einen Schichtparameter  $\xi$  bekommen wir

$$O_\xi = O_{jit}(n), \quad (51)$$

wobei  $O_{jit}$  das “just in time” Ausrechnen der Ableitungen andeuten soll.

Für alle vier Parameter  $V_p, V_s, \rho$  und  $h$  haben wir

$$O_{jit_\Sigma} = 4 O_{jit}(n). \quad (52)$$

Der Aufwand für die Vorwärtsrechnung in vergleichbarer Form ist

$$O_0 = O_d(n), \quad (53)$$

wobei  $O_d$  die “direkte” Vorwärtsrechnung symbolisiert.

Und, sollten die Ableitungen mit Hilfe der Differenzenquotienten bestimmt werden, beträgt der Gesamtaufwand für das Ausrechnen der Ableitungen

$$O_{d_\Sigma} = 4n O_d(n). \quad (54)$$

Da, vorsichtig geschätzt,  $O_{jit} \simeq O_d$  ist, sehen wir, daß die besprochene Vorgehensweise einen Übergang von quadratischem zu linearer Abhängigkeit der Rechenzeit von der Anzahl der Schichten bedeutet.

Ein anderer Vorteil dieser Methode ist, daß die Ableitungen in analytischer Form ausgerechnet werden können. Dadurch entfallen alle für die Differenzenquotienten typischen Probleme mit dem Genauigkeitsverlust in den Fällen, in denen die abzuleitende Funktion, Quotientenschritt und die Ableitung selbst unterschiedliche Größenordnungen haben.

## 5 Numerisches Umsetzen

In diesem Abschnitt diskutieren wir Fragen, die beim Umsetzen des in dieser Arbeit beschriebenen Algorithmus von Bedeutung sein können.

Bei dem Implementieren der Thomson-Haskell Methode geht man wie folgt vor (siehe auch [Wang99]). An der obersten Grenze ( $z = z_1$ ) nimmt man drei Basismatrizen<sup>16</sup>  $y_1^{(1)}$ ,  $y_1^{(2)}$  und  $y_1^{(3)}$ :

$$Y_1 = (y_1^{(1)+}, y_1^{(2)+}, y_1^{(3)+}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (55)$$

und, genauso, an der Grenze zu der untersten Schicht ( $z = z_n$ ):

$$Y_n = (y_n^{(1)-}, y_n^{(2)-}, y_n^{(3)-}) = L_n A_n = L_n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (56)$$

und propagiert beide Matrizen  $Y_1$  und  $Y_n$  zu der Quellgrenze, an der dann der für die Quelle spezifische Sprung  $f_s$  gefordert werden kann:

$$Uy_s^{(1)+} + Vy_s^{(2)+} + Wy_s^{(3)+} - A_dy_s^{(1)-} - B_dy_s^{(2)-} - C_dy_s^{(3)-} = f_s, \quad (57)$$

wobei  $y^+$  und  $y^-$  entsprechend die von oben beziehungsweise von unten propagierte Matrizen sind.

Die daraus resultierenden Koeffizienten  $U, V, W, A_d, B_d$  und  $C_d$  bestimmen die Lösung für jede Schicht:

<sup>16</sup>Die gewählte Matrizen bilden insofern ein Basis, daß jede Lösung der Bewegungsgleichungen, die die notwendige Grenzbedingung erfüllt, kann in Form einer linearen Kombination dieser Matrizen dargestellt werden.

$$y_i = \begin{cases} U y_i^{(1)+} + V y_i^{(2)+} + W y_i^{(3)+} & i = 1, \dots, s-1 \\ A_d y_i^{(1)-} + B_d y_i^{(2)-} + C_d y_i^{(3)-} & i = s, \dots, n. \end{cases} \quad (58)$$

Passen wir die im letzten Abschnitt formulierte Methode für das Ausrechnen der Ableitungen entsprechend an. Dafür differenzieren wir die Gleichung (57) nach einem Schichtparameter  $\xi_i$ :

$$\begin{aligned} & y_s^{(1)+} \frac{\partial U}{\partial \xi_j} + y_s^{(2)+} \frac{\partial V}{\partial \xi_j} + y_s^{(3)+} \frac{\partial W}{\partial \xi_j} - y_s^{(1)-} \frac{\partial A_d}{\partial \xi_j} - y_s^{(2)-} \frac{\partial B_d}{\partial \xi_j} - y_s^{(3)-} \frac{\partial C_d}{\partial \xi_j} = \\ & -U \frac{\partial y_s^{(1)+}}{\partial \xi_j} - V \frac{\partial y_s^{(2)+}}{\partial \xi_j} - W \frac{\partial y_s^{(3)+}}{\partial \xi_j} + A_d \frac{\partial y_s^{(1)-}}{\partial \xi_j} + B_d \frac{\partial y_s^{(2)-}}{\partial \xi_j} + C_d \frac{\partial y_s^{(3)-}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial f_s}{\partial \xi_j}. \end{aligned} \quad (59)$$

Da aber die Ableitungen  $\frac{\partial y_s^{(k)\pm}}{\partial \xi_j}$  und Die Ableitungen  $\frac{\partial f_s}{\partial \xi_j}$  auf der rechten Seite auf zuvor diskutierte Weise (Gleichungen (32), (35), (46), (47) und (48)) schon während der Vorwärtsrechnung bestimmt werden können, bietet uns Gl. (59) die Möglichkeit, Ableitungen der Koeffizienten, und damit auch der Endresultate, auszurechnen:<sup>17</sup>

$$\frac{\partial y_i}{\partial \xi_j} = \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \xi_j} y_i^{(1)} + U \frac{\partial y_i^{(1)}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial V}{\partial \xi_j} y_i^{(2)} + V \frac{\partial y_i^{(2)}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial W}{\partial \xi_j} y_i^{(3)} + W \frac{\partial y_i^{(3)}}{\partial \xi_j} & i = 1, \dots, s-1 \\ \frac{\partial A_d}{\partial \xi_j} y_i^{(1)} + A_d \frac{\partial y_i^{(1)}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial B_d}{\partial \xi_j} y_i^{(2)} + B_d \frac{\partial y_i^{(2)}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial C_d}{\partial \xi_j} y_i^{(3)} + C_d \frac{\partial y_i^{(3)}}{\partial \xi_j} & i = s, \dots, n. \end{cases} \quad (60)$$

Zum Schluß diskutieren wir bekannte numerische Probleme beim Umsetzen der Thomson-Haskell Methode. Wir skizzieren den Ansatz von Wang zu ihrer Lösung (siehe [Wang99]) und zeigen, wie sich das Ausrechnen der partiellen Ableitungen dafür anpassen läßt.

Bei Phasengeschwindigkeit  $\omega/k$  kleiner als Schichtgeschwindigkeit  $V_s$  werden  $\alpha$  und  $\beta$  reell und die Propagationsmatrix  $E$  bekommt

<sup>17</sup>Je nach dem, ob  $j$  grösser oder kleiner als  $s$  ist, werden Ableitungen  $\partial y_s^{(k)+}/\partial \xi_j$  beziehungsweise  $\partial y_s^{(k)-}/\partial \xi_j$  gleich Null sein.

exponentiell wachsende Elemente, so daß die einzelnen Komponenten, der an der Schichtgrenze ankommenden Welle, unterschiedliche Größenordnungen haben können. Da die für P und SV Wellen verantwortlichen Komponenten  $U$  und  $V$  während des Propagierens gekoppelt sind, können die drei Basismatrizen  $y_i^{(1)}$ ,  $y_i^{(2)}$  und  $y_i^{(3)}$  beim Erreichen der Quellgrenze starke lineare Abhängigkeit aufweisen, was die numerische Lösung der Gleichung (57) wesentlich verkompliziert.<sup>18</sup>

Die Idee von Wang besteht darin, die P und SV Wellen an jeder Schichtgrenze künstlich voneinander zu trennen. Dabei wird die Matrix  $Y = (y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)})$  nach jedem Schritt angepaßt:

$Y_i := Y_i Q_i(A_i) N_i(A_i) S_i$ , wobei

$$Q_i(A_i) = \begin{pmatrix} A_{i,32} & -A_{i,12} & 0 \\ -A_{i,31} & A_{i,11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (61)$$

$$N_i(A_i) = \begin{pmatrix} |A_{i,11}|^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & |A_{i,33}|^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & |A_{i,55}|^{-1} \end{pmatrix}, \quad (62)$$

$$S_i = \begin{pmatrix} e^{-\alpha_i h_i} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\beta_i h_i} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\beta_i h_i} \end{pmatrix} \quad (63)$$

und  $A_i = L_i^{-1} Y_i$  sind.

Durch das Multiplizieren mit  $Q_i$  werden die Komponenten, die für P und SV Wellen verantwortlich sind, immer wieder voneinander getrennt. Das Multiplizieren mit  $N_i$  und mit  $S_i$  dient der Normierung. Um die Gleichungen (57) und (58) unverändert benutzen zu können, werden alle beim Propagieren von oben nach unten zuvor ausgerechneten Matrizen  $Y_1, \dots, Y_{i-1}$  mit den gleichen  $Q_i$  und  $N_i$  modifiziert, so daß der gesamte Vorgang am Ende wie eine sehr elegante Auswahl der ursprünglichen Basismatrizen  $y_1^{(1)}$ ,  $y_1^{(2)}$  und  $y_1^{(3)}$  aussieht.

<sup>18</sup>Diese Abhängigkeiten haben keine fundamentale mathematische Natur und kommen nur infolge endlicher Rechengenauigkeit zustande, indem die schneller wachsende Komponente alle anderen, die mit ihnen gekoppelt sind, während des Propagierens "überfluten".

Schreiben wir das einmal aus:

$$\begin{aligned}
Y_{k+1} = & L_k E_k \Omega_k \{ L_k^{-1} L_{k-1} E_{k-1} \Omega_{k-1} \{ \dots \\
& L_3^{-1} L_2 E_2 \Omega_2 \{ L_2^{-1} L_1 E_1 \Omega_1 \{ L_1^{-1} Y_1 \} \} \dots \} \} \\
& \times \prod_{i=k+1}^s (Q_i N_i S_i),
\end{aligned} \tag{64}$$

wobei der Operator  $\Omega_j\{\nu\} = \nu Q_j(\nu) N_j(\nu) S_j$ , und  $\nu$  eine Matrix sind.<sup>19</sup>

Das Multiplizieren startet mit  $\Omega_1$  und setzt sich bei  $\Omega_2, \Omega_3 \dots$  so fort, daß die Produkte innerhalb eines  $\Omega$ -Ausdruckes vollständig ausgerechnet werden, bevor man mit dem nächst höheren fortfährt. Es ist wichtig zu betonen, daß diese strenge Reihenfolge nur numerischer Stabilität dient, und formal mathematisch gesehen nicht zwingend ist. Für das analytische Untersuchen ist folgende Schreibweise bequemer:

$$Y_{k+1} = \left( \prod_{i=k}^1 L_i E_i(h_i) L_i^{-1} \right) Y_1 \left( \prod_{i=1}^s Q_i N_i S_i \right). \tag{65}$$

Genau das Gleiche wiederholt sich beim Propagieren von unten nach oben.

$$Y_k = \left( \prod_{i=k}^{n-1} L_i E_i(-h_i) L_i^{-1} \right) Y_n \left( \prod_{i=s}^n Q_i N_i S_i \right). \tag{66}$$

Für das Ausrechnen der Ableitungen muß Folgendes überlegt werden. Betrachten wir die Gleichung (59), so sehen wir, daß nicht nur die Vektoren  $y_s^{(k)\pm}$  sondern auch die Ableitungen  $\frac{\partial y_s^{(k)\pm}}{\partial \xi_j}$  nach dem Propagieren bis zur Quellgrenze unabhängig sein sollen. Das heißt, daß es unter Umständen nicht genügen wird, die Gleichung (64) einfach zu differenzieren, wie wir das im letzten Abschnitt mit Gl. (34) gemacht haben, um die Ableitungen auszurechnen. Beim Propagieren der Matrix  $\partial Y / \partial \xi_j$  können sich, ähnlich wie bei der  $Y$  selber, lineare Anhängigkeiten zwischen verschiedenen

<sup>19</sup>Matrizen  $Q_i$  und  $N_i$  für  $i > k$  in dem Produktausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (64) werden erst später bei dem Propagieren durch die tiefer liegende Schichten ( $i > k + 1$ ) ausgerechnet und mit den abgespeicherten Matrizen  $Y_i$  für  $i \leq k + 1$  von rechts multipliziert.

Komponenten aufbauen, die dann zum Entarten auf der rechten Seite der Gl. (59) führen würden. Es muß eher ein der Gl. (64) ähnlicher Algorithmus auf die Gl. (32) angewandt werden. Um das zu erreichen, schreiben wir analog zur Gl. (64):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Y_{k+1}^*}{\partial \xi_j} &= (\Sigma_{k+1}^{(1)*}) + (\Sigma_{k+1}^{(2)*}), \tag{67} \\
(\Sigma_{k+1}^{(1)*}) &= L_k E_k \Omega_k \{ L_k^{-1} L_{k-1} E_{k-1} \Omega_{k-1} \{ \dots \Omega_{j+1} \{ L_{j+1}^{-1} \partial(L_j E_j) / \partial \xi_j \times \\
&\quad \Omega_j \{ L_j^{-1} \dots \{ L_3^{-1} L_2 E_2 \Omega_2 \{ L_2^{-1} L_1 E_1 \Omega_1 \{ L_1^{-1} Y_1 \} \} \dots \} \} \dots \} \} \\
&\quad \times \prod_{i=k+1}^s (Q_i^{(1)*} N_i^{(1)*} S_i), \\
(\Sigma_{k+1}^{(2)*}) &= L_k E_k \Omega_k \{ L_k^{-1} L_{k-1} E_{k-1} \Omega_{k-1} \{ \dots \Omega_{j+1} \{ L_{j+1}^{-1} L_j E_j \times \\
&\quad \Omega_j \{ \partial L_j^{-1} / \partial \xi_j \dots \{ L_3^{-1} L_2 E_2 \Omega_2 \{ L_2^{-1} L_1 E_1 \Omega_1 \{ L_1^{-1} Y_1 \} \} \dots \} \} \dots \} \} \\
&\quad \times \prod_{i=k+1}^s (Q_i^{(2)*} N_i^{(2)*} S_i).
\end{aligned}$$

Oder analog zur Gl. (65):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(Y_{k+1}^*)}{\partial \xi_j} &= \left( \prod_{i=k}^{j+1} L_i E_i(h_i) L_i^{-1} \right) \frac{\partial(L_j E_j(h_j))}{\partial \xi_j} L_j^{-1} \tag{68} \\
&\quad \times \left( \prod_{i=j-1}^1 L_i E_i(h_i) L_i^{-1} \right) Y_1 \left( \prod_{i=1}^s Q_i^{(1)*} N_i^{(1)*} S_i \right) \\
&\quad + \left( \prod_{i=k}^{j+1} L_i E_i(h_i) L_i^{-1} \right) L_j E_j(h_j) \frac{\partial L_j^{-1}}{\partial \xi_j} \\
&\quad \times \left( \prod_{i=j-1}^1 L_i E_i(h_i) L_i^{-1} \right) Y_1 \left( \prod_{i=1}^s Q_i^{(2)*} N_i^{(2)*} S_i \right).
\end{aligned}$$

Auf diese Weise propagierte Ableitungen kommen an der Quellgrenze linear unabhängig an, können aber nicht direkt auf der rechten Seite der Gleichung (59) eingesetzt werden, da sie mit anderen  $Q$  und  $N$  Matrizen als die Basismatrizen  $y_s^{(k)\pm}$  auf der linken Seite orthonormiert wurden.

Um die Ableitungen wieder vergleichbar zu machen, berechnen wir formal die Ableitungen der einzelnen Matrizen  $Y_k$  aus der Gl. (65). Dabei vergessen wir für einen Augenblick, daß das Multiplizieren in Wirklichkeit in der Reihenfolge Gl. (64) erfolgt. Für  $1 \leq j \leq k < s$  bekommen wir dann:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(Y_{k+1})}{\partial\xi_j} &= \left(\prod_{i=k}^{j+1} L_i E_i(h_i) L_i^{-1}\right) \frac{\partial(L_j E_j(h_j))}{\partial\xi_j} L_j^{-1} \\
&\quad \times \left(\prod_{i=j-1}^1 L_i E_i(h_i) L_i^{-1}\right) Y_1 \left(\prod_{i=1}^s Q_i N_i S_i\right) \\
&\quad + \left(\prod_{i=k}^{j+1} L_i E_i(h_i) L_i^{-1}\right) L_j E_j(h_j) \frac{\partial(L_j^{-1})}{\partial\xi_j} \\
&\quad \times \left(\prod_{i=j-1}^1 L_i E_i(h_i) L_i^{-1}\right) Y_1 \left(\prod_{i=1}^s Q_i N_i S_i\right)
\end{aligned} \tag{69}$$

und für  $1 \leq k \leq j \leq s$ :

$$\frac{\partial(Y_{k+1})}{\partial\xi_j} = 0. \tag{70}$$

Wir berücksichtigen bei dem Ableiten, daß das Multiplizieren mit den  $Q$ ,  $N$  und  $S$  nicht mehr als eine Transformation von den ursprünglichen Basismatrizen  $y_1^{(i)\pm}$  und  $y_n^{(i)\pm}$  bedeutet. Diese Matrizen dienen nur als Basis beim Propagieren und müssen nicht mitdifferenziert werden.<sup>20</sup>

Vergleichen wir jetzt Gl. (69) und Gl. (70) mit der Gl. (67) Gl. (68) und Gl. (65) und berücksichtigen, daß für  $1 \leq i < j$   $Q_i^{(1)*} = Q_i^{(2)*} = Q_i$  und  $N_i^{(1)*} = N_i^{(2)*} = N_i$  sind.

Für  $1 \leq j \leq k \leq s$  bekommen wir dann:

---

<sup>20</sup>Diese wichtige Überlegung stammt von Herrn Thomas Forbriger.



$$\begin{aligned}
\frac{\partial(Y_{k+1})}{\partial\xi_j} &= (\Sigma_{k+1}^{j(1)}) \left( \prod_{i=j}^s Q_i^{(1)*} N_i^{(1)*} S_i \right)^{-1} \left( \prod_{i=j}^s Q_i N_i S_i \right) \quad (71) \\
&+ (\Sigma_{k+1}^{j(2)}) \left( \prod_{i=j}^s Q_i^{(2)*} N_i^{(2)*} S_i \right)^{-1} \left( \prod_{i=j}^s Q_i N_i S_i \right).
\end{aligned}$$

Zusammenfassend können wir folgendes festhalten. Die, nach Gl. (64) und Gl. (67) errechneten Matrizen  $Y_s$  und  $\frac{\partial Y_s^*}{\partial \xi_j}$  weisen keine numerische linearen Abhängigkeiten auf. Um die Ableitungen in der Gl. (59) einsetzen zu können, müssen sie mit Hilfe der Gl. (71) transformiert werden. Diese Transformation wird keine numerischen Schwierigkeiten bereiten, da das Multiplizieren mit Produktreihen von  $Q$ ,  $N$  und  $S$  beim Ansatz von Wang nach jedem Schritt stattfindet.

Auf diese Weise errechneten Ableitungen  $\frac{\partial y_s^{(k)\pm}}{\partial \xi_j}$  sind numerisch linear unabhängig und können jetzt in Gl. (59) und Gl. (60) eingesetzt werden.

## 6 Anhang

In diesem Abschnitt skizzieren wir eine neue<sup>21</sup> einfache Methode zum Errechnen von synthetischen Seismogrammen, die der Thomson-Haskell Methode ähnelt und daher nur von illustrativem Interesse ist. Sie kann als eine Gedankenstütze für diejenigen dienen, für die der Thomson-Haskell Ansatz trotz oder gerade wegen seiner Eleganz bei der ersten Bekanntschaft zu extravagant erscheint.

Der Grundgedanke hinter der neuen Methode ist es, die Vorteile der Potentialdarstellung, wie zum Beispiel das leichte Propagieren innerhalb einer Schicht, mit den Vorteilen der Darstellung in Form von Verschiebungsvektor und Totalspannung, sowie das einfache Formulieren von Randbedingungen zu vereinen.

Wir benutzen das gleiche Modell wie in Abschnitt 3 und starten mit der Gleichung (7) in leicht abgewandelter Form (siehe auch [Landau89], Seite 108):

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \nabla^2 \vec{u} + \rho \omega^2 \vec{u} = 0. \quad (72)$$

Wenn wir das Gesamtfeld  $\vec{u}$  wieder in wirbelfreie  $\vec{u}_p$  und quellfreie  $\vec{u}_s$  Teile zerlegt denken

$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{u}_p + \vec{u}_s \\ \operatorname{rot} \vec{u}_p = 0 \\ \operatorname{div} \vec{u}_s = 0, \end{cases} \quad (73)$$

bekommen wir aus Gl. (72)

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u}_p + \mu \nabla^2 (\vec{u}_p + \vec{u}_s) + \rho \omega^2 (\vec{u}_p + \vec{u}_s) = 0. \quad (74)$$

Wenden wir den Divergenzoperator auf beiden Seiten dieser Gleichung an, ergibt sich

---

<sup>21</sup>In [Buchen96] findet der interessierte Leser eine weitere Diskussion vergleichbarer Methoden.

$$(\lambda + \mu)\nabla^2 \operatorname{div} \vec{u}_p + \mu \operatorname{div} [\nabla^2(\vec{u}_p + \vec{u}_s)] + \rho\omega^2 \operatorname{div} \vec{u}_p = 0, \quad (75)$$

oder, da der Laplaceoperator und die Divergenz kommutieren,

$$\operatorname{div} [(\lambda + 2\mu)\nabla^2 \vec{u}_p + \rho\omega^2 \vec{u}_p] = 0. \quad (76)$$

Die Rotation des Ausdruckes in den eckigen Klammern verschwindet laut Gl. (73) genauso und folglich gilt

$$\nabla^2 \vec{u}_p + \frac{\rho\omega^2}{(\lambda + 2\mu)} \vec{u}_p = 0. \quad (77)$$

Ähnlich wenden wir die Rotation bei der Gleichung (72) an und berücksichtigen, daß die Rotation eines Gradienten verschwindet. Dann ist

$$\nabla^2 \vec{u}_s + \frac{\rho\omega^2}{\mu} \vec{u}_s = 0. \quad (78)$$

Wir haben also sechs Wellengleichungen um  $\vec{u}$  zu bestimmen. Dabei sollen überall die Bedingungen (73) gelten. Hinzu kommen die üblichen Stetigkeitsbedingungen für den Verschiebungsvektor  $\vec{u} = \vec{u}_p + \vec{u}_s$  und für die Normalspannung  $\vec{\sigma}_z = (\sigma_{iz})$  an den Schichtgrenzen.

Wir schreiben die Lösungen der Wellengleichungen (77) und (78) ähnlich der Gleichung (22) nur in kartesischen Koordinaten  $(x, y, z)$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{s_x} = (A_x e^{\beta z} + B_x e^{-\beta z}) e^{i(k_x x + k_y y)} \\ u_{s_y} = (A_y e^{\beta z} + B_y e^{-\beta z}) e^{i(k_x x + k_y y)} \\ u_{s_z} = (A_z e^{\beta z} + B_z e^{-\beta z}) e^{i(k_x x + k_y y)} \\ \\ u_{p_x} = (C_x e^{\alpha z} + D_x e^{-\alpha z}) e^{i(k_x x + k_y y)} \\ u_{p_y} = (C_y e^{\alpha z} + D_y e^{-\alpha z}) e^{i(k_x x + k_y y)} \\ u_{p_z} = (C_z e^{\alpha z} + D_z e^{-\alpha z}) e^{i(k_x x + k_y y)}. \end{array} \right. \quad (79)$$

Die zwölf Konstanten  $A_i, B_i, C_i$  und  $D_i$  können sofort mit Hilfe der Gleichung (73) auf sechs reduziert werden

$$e^{-i(k_x x + k_y y)} \operatorname{rot}_x \vec{u}_p = \quad (80)$$

$$\begin{aligned} & (ik_y C_z - \alpha C_y) e^{\alpha z} \\ & + (ik_y D_z + \alpha D_y) e^{-\alpha z} = 0 \end{aligned}$$

$$e^{-i(k_x x + k_y y)} \operatorname{rot}_y \vec{u}_p = \quad (81)$$

$$\begin{aligned} & (-ik_x C_z + \alpha C_x) e^{\alpha z} \\ & + (-ik_x D_z - \alpha D_x) e^{-\alpha z} = 0 \end{aligned}$$

$$e^{-i(k_x x + k_y y)} \operatorname{rot}_z \vec{u}_p = \quad (82)$$

$$\begin{aligned} & (ik_x C_y - ik_y C_x) e^{\alpha z} \\ & + (ik_x D_y - ik_y D_x) e^{-\alpha z} = 0 \end{aligned}$$

und

$$e^{-i(k_x x + k_y y)} \operatorname{div} \vec{u}_s = \quad (83)$$

$$\begin{aligned} & (ik_x A_x + ik_y A_y + \beta A_z) e^{\beta z} \\ & + (ik_x B_x + ik_y B_y - \beta A_z) e^{-\beta z} = 0. \end{aligned}$$

Da diese Gleichungen bei jedem  $z$  innerhalb einer Schicht gelten sollen, können wir zusammenfassend schreiben

$$\left\{ \begin{array}{l} C_y = \frac{k_y}{k_x} C_x \\ D_y = \frac{k_y}{k_x} D_x \\ C_z = -\frac{i\alpha}{k_x} C_x \\ D_z = \frac{i\alpha}{k_x} D_x \\ ik_x A_x + ik_y A_y + \beta A_z = 0 \\ ik_x B_x + ik_y B_y - \beta A_z = 0. \end{array} \right. \quad (84)$$

Die verbliebenen sechs Konstanten müssen aus den Bedingungen an den Schichtgrenzen bestimmt werden.

Die Stetigkeitsbedingung für den Verschiebungsvektor  $\vec{u} = \vec{u}_p + \vec{u}_s$  ist trivial. An der Grenze zwischen dem  $i$ -ten und der  $(i + 1)$ -ten Schicht haben wir:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{ix}e^{\alpha_i z_{i+1}} + D_{ix}e^{-\alpha_i z_{i+1}} + A_{ix}e^{\beta_i z_{i+1}} + B_{ix}e^{-\beta_i z_{i+1}} = \\ C_{(i+1)x}e^{\alpha_{i+1} z_{i+1}} + D_{(i+1)x}e^{-\alpha_{i+1} z_{i+1}} + A_{(i+1)x}e^{\beta_{i+1} z_{i+1}} + B_{(i+1)x}e^{-\beta_{i+1} z_{i+1}} \\ \\ C_{iy}e^{\alpha_i z_{i+1}} + D_{iy}e^{-\alpha_i z_{i+1}} + A_{iy}e^{\beta_i z_{i+1}} + B_{iy}e^{-\beta_i z_{i+1}} = \\ C_{(i+1)y}e^{\alpha_{i+1} z_{i+1}} + D_{(i+1)y}e^{-\alpha_{i+1} z_{i+1}} + A_{(i+1)y}e^{\beta_{i+1} z_{i+1}} + B_{(i+1)y}e^{-\beta_{i+1} z_{i+1}} \\ \\ C_{iz}e^{\alpha_i z_{i+1}} + D_{iz}e^{-\alpha_i z_{i+1}} + A_{iz}e^{\beta_i z_{i+1}} + B_{iz}e^{-\beta_i z_{i+1}} = \\ C_{(i+1)z}e^{\alpha_{i+1} z_{i+1}} + D_{(i+1)z}e^{-\alpha_{i+1} z_{i+1}} + A_{(i+1)z}e^{\beta_{i+1} z_{i+1}} + B_{(i+1)z}e^{-\beta_{i+1} z_{i+1}}. \end{array} \right. \quad (85)$$

Um die Bedingungen für die Normalspannung zu bekommen, setzen wir Gl. (79) in die Gleichung (6) ein und berücksichtigen Gl. (84)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xz} = \mu \left[ \beta e^{\beta z} A_x - \beta e^{-\beta z} B_x + i k_x e^{\beta z} A_z \right. \\ \left. + i k_x e^{-\beta z} B_z + 2\alpha e^{\alpha z} C_x - 2\alpha e^{-\alpha z} D_x \right] e^{i(k_x x + k_y y)} \\ \sigma_{yz} = \mu \left[ -\frac{k_x}{k_y} \beta e^{\beta z} A_x + \frac{k_x}{k_y} \beta e^{-\beta z} B_x + i \frac{\beta^2 + k_y^2}{k_y} e^{\beta z} A_z \right. \\ \left. + i \frac{\beta^2 + k_y^2}{k_y} e^{-\beta z} B_z + \frac{2\alpha k_y}{k_x} e^{\alpha z} C_x - \frac{2\alpha k_y}{k_x} e^{-\alpha z} D_x \right] e^{i(k_x x + k_y y)} \\ \sigma_{zz} = 2\mu \beta e^{\beta z} A_z - 2\mu \beta e^{-\beta z} B_z \\ + \frac{i}{k_x} [\lambda(k_x^2 + k_y^2 - \alpha^2) - 2\mu\alpha^2] e^{\alpha z} C_x \\ + \frac{i}{k_x} [\lambda(k_x^2 + k_y^2 - \alpha^2) - 2\mu\alpha^2] e^{-\alpha z} D_x. \end{array} \right. \quad (86)$$

Fassen wir  $\vec{u}$  und  $\vec{\sigma}_z$  zusammen, so kann kompakter formuliert werden:

$$(u_x, u_y, u_z, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz})^T = M (A_x, B_x, A_z, B_z, C_x, D_x)^T, \quad (87)$$

wobei

$$M(z) = \tag{88}$$

$$\begin{pmatrix} e^{\beta z} & e^{-\beta z} & 0 & 0 & e^{\alpha z} & e^{-\alpha z} \\ -\frac{k_x}{k_y} e^{\beta z} & -\frac{k_x}{k_y} e^{-\beta z} & \frac{i\beta}{k_y} e^{\beta z} & -\frac{i\beta}{k_y} e^{-\beta z} & \frac{k_y}{k_x} e^{\alpha z} & \frac{k_y}{k_x} e^{-\alpha z} \\ 0 & 0 & e^{\beta z} & e^{-\beta z} & -\frac{i\alpha}{k_x} e^{\alpha z} & +\frac{i\alpha}{k_x} e^{-\alpha z} \\ \mu\beta e^{\beta z} & -\mu\beta e^{-\beta z} & i\mu k_x e^{\beta z} & i\mu k_x e^{-\beta z} & 2\mu\alpha e^{\alpha z} & -2\mu\alpha e^{-\alpha z} \\ -\mu\beta \frac{k_x}{k_y} e^{\beta z} & \mu\beta \frac{k_x}{k_y} e^{-\beta z} & i\mu \frac{\beta^2 + k_y^2}{k_y} e^{\beta z} & i\mu \frac{\beta^2 + k_y^2}{k_y} e^{-\beta z} & 2\mu \frac{\alpha k_y}{k_x} e^{\alpha z} & -2\mu \frac{\alpha k_y}{k_x} e^{-\alpha z} \\ 0 & 0 & 2\mu\beta e^{\beta z} & -2\mu\beta e^{-\beta z} & \Gamma e^{\alpha z} & \Gamma e^{-\alpha z} \end{pmatrix},$$

und  $\Gamma = \frac{i}{k_x} [\lambda(k_x^2 + k_y^2 - \alpha^2) - 2\mu\alpha^2]$  ist.

Das Propagieren innerhalb einer Schicht bedeutet, genauso wie bei der Thomson-Haskell Methode, das Multiplizieren der Parametermatrix

$$y = (A_x, B_x, A_z, B_z, C_x, D_x)^T \tag{89}$$

mit der Diagonalmatrix

$$E(\pm h) = D [e^{\pm\alpha h}, e^{\mp\alpha h}, e^{\pm\alpha h}, e^{\mp\alpha h}, e^{\pm\beta h}, e^{\mp\beta h}],$$

wobei  $h$  die Schichtmächtigkeit ist und das positive Vorzeichen beim Propagieren von oben nach unten benutzt werden soll.

Kennen wir die Matrix  $y$  für die  $i$ -te Schicht, so kann sie auch für die  $(i + 1)$ -te Schicht bestimmt werden:

$$y_{i+1} = M_{i+1}^{-1}(z_{j+1}) M_i(z_{j+1}) E_i(h_i) y_i. \tag{90}$$

Dabei bedeutet das Multiplizieren mit  $E_i(h_i)$  das Propagieren innerhalb der  $i$ -ten Schicht von der oberen Grenze zur unteren. Das Multiplizieren mit  $M_{i+1}^{-1} M_i$  erlaubt das Überschreiten der Schichtgrenze, bei dem die Stetigkeitsbedingungen für den Verschiebungsvektor und für die Normalspannung erfüllt sind. Ähnlich haben wir für das Propagieren von unten nach oben:

$$y_i = M_i^{-1}(z_{i+1}) M_{i+1}(z_{i+1}) E_i(-h_{i+1}) y_{i+1}. \tag{91}$$

Alle anderen Überlegungen, die wir im Zusammenhang mit der Thomson-Haskell Methode angestellt haben, lassen sich jetzt direkt auf die neue Methode übertragen.

So können wir das Propagieren in zwei Teile aufspalten.

Wir starten mit  $y_n = (0, B_x, 0, B_z, 0, D_x)^T$  an der Grenze der untersten Schicht und propagieren nach oben bis zur Quelltiefe.

Gleichzeitig starten wir an der Oberfläche mit

$y_1 = M^{-1} (u_x, u_y, u_z, 0, 0, 0)^T$ , wobei  $u_x, u_y$  und  $u_z$  die an der Oberfläche 'beobachteten' Verschiebungen sind, und propagieren diese von oben nach unten bis hin zur Quelle. An der Quellgrenze soll dann die Matrix  $y$  einen für die Quelle spezifischen Sprung aufweisen.

Durch Ausrechnen der Ableitungen von  $M$  nach den Schichtparametern erhalten wir die Möglichkeit, letztere während der Inversion gezielt zu verändern.

Die in dieser Anhang skizzierte Vorgehensweise besitzt, außer vielleicht methodologischen, kaum Vorteile im Vergleich zur Thomson-Haskell Methode, und soll daher nur als Illustration zum Haupttext dienen.

На таком расстоянье любой приказ  
превращается рацией в буги-вуги.

И. А. Бродский<sup>22</sup>

## 7 Danksagungen

Herrn Professor Wieland danke ich für die Vergabe und Betreuung dieser Arbeit sowie für sein Vertrauen. Die ruhige und freundschaftliche Atmosphäre, die im von ihm geleiteten Institut herrscht, macht die gemütliche Villa am Hang über Stuttgart zu einem wunderschönen Platz für ruhiges Arbeiten.

Bei Herrn Forrbiger bedanke ich mich herzlich für die vielseitige Unterstützung und die aufschlußreichen Diskussionen in allen Stadien dieser Arbeit. Seine Ideen und Vorschläge haben unter anderem maßgeblich zur Klärung der numerischen Aspekten dieser Arbeit beigetragen.

Herrn Professor Seyfried danke ich für die Zustimmung zu einer für einen Geologiestudenten eher ungewöhnlicher Diplomarbeit und für die Übernahme des Mitberichtes.

Herrn Dr. Behmel, Dr. Hinkelbein, Professor Leinfelder und Dr. Nose danke ich für die Hilfe während des gesamten Studiums.

Bei meinen vorgesetzten Kollegen Dietrich Carisius, Dr. Alexey Gochberg, Dr. Michael Kempf und insbesondere bei Harald Postner bedanke ich mich herzlich für Ihre Unterstützung.

Herr Gunter Noack und Frau Petra Postner haben diesen Text durchgelesen und korrigiert. Viele an ihrer Stelle hätten schon nach den mehreren auf dem Titelblatt gefundenen Fehler aufgegeben. Ihrer Geduld und Ausdauer fühle ich mich zutiefst verpflichtet.

Einen besonderen Dank schulde ich den Menschen, von denen ich hoffe, etwas gelernt zu haben. Neben all den obengenannten waren das vor allem Georgij Aratunjan, Dr. Alexey Gochberg, Alexander Fock, Jürgen Koch, Alexandra Konajeva, Dr. Alexey Kosturin, Alexander Novodvorskij, Alexey Smirnov und Professor Tumarkin.

Meinen Söhnen sei gedankt für die notwendige Abwechslung und meinen **Eltern** für alles. Diese Diplomarbeit ist nicht das Wichtigste davon, was ohne sie nicht möglich gewesen wäre.

---

<sup>22</sup>Bei der Entfernung jeden Befehl verzerren die Wellen zu Boogie-Woogie. J.Brodsky



## 8 Literaturverzeichnis

- [Aki80] K.Aki, P.G.Richards: Quantitativ seismology - theory and methods, Vol. I and II. San Francisco: Freeman and Co. 1980
- [Bohlen98] T.Bohlen, W.Rabbel, C.Bruhn: Vorgehensweise und Probleme bei der Interpretation von Seismogrammen mit Hilfe viskoelastischer 2-D/3-D FD-Modellierungen. Jahrestagung der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft. Göttingen. 1998.
- [Buchen96] P.W.Buchen: Free-mode surface-wave calculation. Geophys. J. Int., 124, 869-887, 1996.
- [Courant93] R.Courant, D.Hilbert: Methoden der Mathematischen Physik. Springer Verlag. 1993.
- [Deubel96] K.Deubel: Über die Nutzung von Scherwellen in der seismischen Erkundung. In 56. Jahrestagung der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft. Freiberg (Sachsen). Germany. 1996.
- [Forbriger98] T.Forbriger: Wellenfeldanalyse für die Flachseismik. 5. DGG-Seminar "Umweltgeophysik". 1998.
- [Landau80] L.D.Landau, E.M Lifschitz: Elastizitätstheorie. Akademie-Verlag Berlin. 1989.
- [Roth96] T.Roth, P.Schikowsky, H.Meyer: Seismische Messungen auf Braunkohletagebaukippen zur Bestimmung geomechanischer Parameter. In Kolloquium: Seismik im Flachbereich. Bucha (Sachsen), Germany. 1996.
- [Stokoe89] K.I.Stokoe, G.Ric, S.Nazarian: In situ seismik testing with surface waves. In: Twelfth international Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. Rio De Janeiro. 1989.
- [Wang99] R.Wang: A Simple Orthonormalization Method for Stable and Efficient Computation of Green ´s Functions. Bulletin of the Seismological Society of America, 3, 733-741, June 1999.